7. Показать формульно различие между сильным и слабым перемешиванием.

Перемешивание

Системы, в которых начальный элементарный объем сильно деформируется, выпуская многочисленные отростки, становящиеся все более тонкими и протяженными. Начальная область так распределится по фазовому пространству, что ее кусочки можно будет обнаружить в любой части фазового пространства гиперповерхности (или, для диссипативных систем – в любой части притягивающего инвариантного множества). Подобное свойство динамической системы называют перемешиванием.

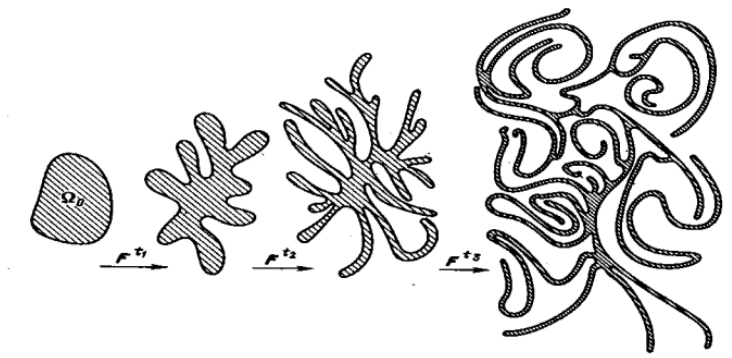

Рис. 1. Перемешивание.

Если A и B – произвольные малые области, $A_t = \varphi_t(A)$, то формально перемешивание определяется как

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(A_t \cap B)}{V(B)} = \frac{V(A)}{V(D)} = \mu(A).$$

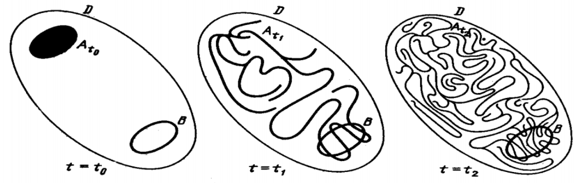

Рис. 2. Перемешивание (формально).

Пример Гиббса

После перемешивания взятая на пробу капля содержит долю чернил, равную отношению объема области D_0 к объему стакана, независимо от формы и положения D_0 и D_1.

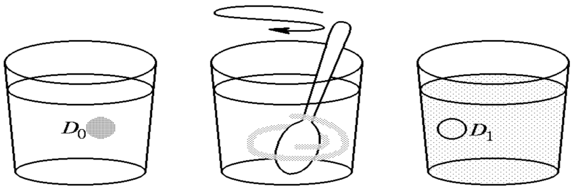

Рис. 3. Пример Гиббса.

Определения сильного и слабого перемешивания

Динамическая система $\{F^t\}$ называется **сильно** перемешивающей, если для любых $f,\, h \in L^2(M,\, \mathfrak{M},\, \mu)$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int f(F^t x)h(x)d\mu(x) - \int f(x)d\mu(x)\int h(x)d\mu(x)\right) = 0.$$

Динамическая система $\{F^t\}$ называется **слабо** перемешивающей, если для любых $f,\, h \in L^2(M,\, \mathfrak{M},\, \mu)$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\int f(F^t x)h(x)d\mu(x) - \int f(x)d\mu(x)\int h(x)d\mu(x)\right| = 0.$$

Перемешивание vs эргодичность

Динамическая система с перемешиванием эргодична. Обратное неверно: например, движение на торе с иррациональным отношением частот эргодично, но не перемешивает.